

1. Najděte algoritmus, který v lineárním čase najde minimální kostru grafu s jednotkově ohodnocenými hranami.

Stačí spustit DFS a vzít strom tvořený stromovými hranami.

2. Co se stane v Jarníkově/Borůvkově/Kruskalově algoritmu, když váhy hran nebudou unikátní?
Jak můžeme algoritmy upravit, aby i v takovém případě našly unikátní minimální kostru?

Jarník – předpokládáme-li, že algoritmus z minimálních hran vybere právě jednu libovolně, doběhne a najde jednu z několika minimálních koster.
Borůvka – může do kostry přidat cyklus (např. uvažte cyklus na u_1, u_2, u_3 s jednotkovými hranami, kde u_i vybere hranu do $u_{i+1 \bmod 3}$). Kruskal – v závislosti na uspořádání najde jednu z několika minimálních koster.

Kostru můžeme „zjednotčit“ tím, že za nové váhy hran prohlásíme dvojice (váha, index), kde index je pořadové číslo hrany na vstupu, s lexikografickým uspořádáním.

3. Stručně popište konkrétní implementaci tří algoritmů na hledání minimální kostry, určete jejich asymptotickou složitost a seřadte je podle časové složitosti.

Například:

- Jarníkův alg. s Fibonacciho haldou – $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- Borůvkův alg. – $\mathcal{O}(m \log n)$
- Zkoušení všech podmnožin hran – $\mathcal{O}(2^n n)$

4. Najděte co nejrychlejší algoritmus pro hledání minimální kostry v grafu s hranami ohodnocenými přirozenými čísly $1, 2, \dots, k$.

Z našich algoritmů je nejvhodnější použít upravený Jarníkův alg., který bude mít v haldě k vrcholů, kde každý obsahuje pole sousedních vrcholů s touto vzdáleností. Výsledná časová složitost je $n \log k$.

4. Popište jednoduchou Union-Find datovou strukturu, která obě operace zvládne v čase $\mathcal{O}(n)$.

Stačí si v každém vrcholu pamatovat index komponenty („barvu“), při Find barvy porovnat a při Join jednu z komponent přebarvit.

5. Popište Union-Find datovou strukturu, která pomocí udržování lesa na vrcholech původního grafu operace zvládne v čase $O(\log n)$.

Viz kapitolu 7.4 Průvodce, sekci „Union-Find s keříky“.

6. Dokažte, že hrana je most právě tehdy, když je součástí každé kostry.

Most je nutně součástí každé kostry, kostra bez něj by byla nesouvislá. Zbytek obměnou: Kdyby hrana nebyla most, ležela by na kružnici a mohli bychom ji nahradit zbytkem kružnice, případně smazat pár dalších hran, které by v kostře vytvářely cykly.