

**Minimální kostra grafu  $G$ :** Podgraf  $H$  t.ž.  $H$  je strom obsahující každý vrchol  $G$  a součet vah jeho hran je minimální.

**Jarníkův algoritmus:** „Postupně budujeme kostru přidáváním nejlehčí sousední hrany.“

**Borůvkův algoritmus:** „Udržujeme les a v každém kroku každý strom sloučíme s nejbližším sousedem.“

**Kruskalův algoritmus:** „Postupně budujeme les koster přidáváním hran od nejlehčí po nejtěžší. Vynecháme hrany, které by přidaly cyklus.“

**Union-Find:** Datová struktura udržující dynamicky komponenty souvislosti. Rozhraní:

- $\text{Find}(u, v)$  - Zjistí, jestli  $u$  a  $v$  leží ve stejné komponentě souvislosti.
- $\text{Union}(u, v)$  - Přidá hranu  $\{u, v\}$ , tedy spojí komponenty, ve kterých se vrcholy nacházejí.

1. Najděte algoritmus, který v lineárním čase najde minimální kostru grafu s jednotkově ohodnocenými hranami.
2. Co se stane v Jarníkově/Borůvkově/Kruskalově algoritmu, když váhy hran nebudou unikátní?  
Jak můžeme algoritmy upravit, aby i v takovém případě našly unikátní minimální kostru?
3. Stručně popište konkrétní implementaci tří algoritmů na hledání minimální kostry, určete jejich asymptotickou složitost a seřadte je podle časové složitosti.
4. Najděte co nejrychlejší algoritmus pro hledání minimální kostry v grafu s hranami ohodnocenými přirozenými čísly  $1, 2, \dots, k$ .
4. Popište jednoduchou Union-Find datovou strukturu, která obě operace zvládne v čase  $O(n)$ .
5. Popište Union-Find datovou strukturu, která pomocí udržování lesa na vrcholech původního grafu operace zvládne v čase  $O(\log n)$ .
6. Dokažte, že hrana je most právě tehdy, když je součástí každé kostry.